Automatisches Beweisen *Übungsblatt 4*

Carsten Sinz **Sommersemester 2003** **16.06.03**
Prof. W. Küchlin **Abgabe: 23.06.03**

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sei $F = (x \vee y \vee z) \wedge \neg x \wedge (z \vee \neg y) \wedge (x \vee w)$.

(a) Geben Sie (graphisch) die (nicht-reduzierte) BDD-Darstellung von F bezüglich der Variablenordnung $w \succ x \succ y \succ z$ an, die man durch Shannon-Expansion von F erhält.

(b) Reduzieren Sie F mittels der Reduktionsregeln für BDDs.

(c) Lesen Sie aus dem reduzierten BDD alle Modelle von F ab.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

BDDs lassen sich außer mit der in der Vorlesung angegebenen Shannon-Zerlegung $f \equiv x \wedge f|_{x=1} \vee \neg x \wedge f|_{x=0}$, bei der man für einen inneren BDD-Knoten $f_l = f|_{x=0}$ und $f_h = f|_{x=1}$ setzt, auch mittels der Davio-Zerlegung $f \equiv f|_{x=0} \oplus x \wedge (f|_{x=0} \oplus f|_{x=1})$ erzeugen ($\oplus$ steht hierbei für das exklusive oder XOR).

1. Wie wählt man bei der Davio-Zerlegung die beiden Nachfolger f_l und f_h eines inneren BDD-Knotens?

2. Welche vereinfachenden BDD-Reduktionen sind dann möglich? (Betrachten Sie z.B. Fälle wie $f_{l/h} = 0$, $f_{l/h} = 1$ oder $f_l = f_h$.)

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Zwei $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$-Strukturen $\mathcal{A} = (A, a)$ und $\mathcal{B} = (B, b)$ heißen isomporph, falls es eine bijektive Abbildung $\pi : A \to B$ gibt, für die gilt:

(i) $\pi(a(f)(a_1, \ldots, a_n)) = b(f)(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(ii) Für alle $R \in \mathcal{R}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt $a(R)(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn $b(R)(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$.

Zeigen Sie: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorphe $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$-Strukturen und $\beta : \mathcal{V} \to A$, so gilt für alle $F \in \Phi$: $(\mathcal{A}, \beta) \models F$ genau dann, wenn $(\mathcal{B}, \pi \circ \beta) \models F$.

Aufgabe 4 [5 Punkte (+ 3 optional)]

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer auf G definierten Funktion $\circ : G \times G \to G$ und einem ausgezeichneten Element $e \in G$, so dass die folgenden Bedingungen (Gruppenaxiome) gelten:

1. $\circ$ ist assoziativ.
2. e ist Neutralelement bezüglich $\circ$.
3. Alle Gruppenelemente x besitzen ein inverses Element y.

(a) Geben Sie eine Formalisierung der Gruppenaxiome in PL1 an. Geben Sie insbesondere die von Ihnen gewählten Mengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppenaxiome erfüllbar sind, indem Sie ein Modell angeben.

(c) [optional] Für die Gleichheits-Relation müssen zusätzliche Eigenschaften spezifiziert werden, um nur die übliche Interpretation dieses Prädikats zu gewährleisten. Wie sehen diese aus?