Strukturelle Induktion

Die strukturelle Induktion (auch Induktion über den Formelaufbau genannt) ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweisen von Eigenschaften logischer Formeln.

Sie besteht wie die aus den Grundvorlesungen bekannte vollständige Induktion aus zwei Schritten: dem Induktionsanfang (Basisschritt) und dem Induktionsschritt.

Im **Basisschritt** zeigt man die Gültigkeit der Eigenschaft für jede atomare Formel und jeden nullstelligen Junktor.

Im **Induktionsschritt** geht man von der **Induktionsvoraussetzung** aus, dass beliebige Formeln diese Eigenschaft haben. Anschließend zeigt man, dass dann auch alle Formeln diese Eigenschaft haben, die mittels den in der Induktionsvoraussetzung gegebenen Axiomen (und den Bildungsregeln) erzeugt werden können.

Beispiel

Behauptung:

Seien β_0 und β_0' Belegungen und $F \in \Phi$. Dann gilt:

Falls $\beta_0(x) = \beta_0'(x)$ für alle $x \in \Phi_0$, dann ist $\beta(F) = \beta'(F)$.

Beweis mittels struktureller Induktion:

Sei $\beta_0(x) = \beta_0'(x)$ für alle $x \in \Phi_0$ (Vor.)
zu zeigen: $\beta(F) = \beta'(F)$ für jedes $F \in \Phi$

<u>Induktionsanfang:</u>

- Sei F eine atomare Formel, also $F \in \Phi_0$. Dann gilt:

$$\beta(F) \overset{Def.}{=} \beta_0(F) \overset{Vor.}{=} \beta_0'(F) \overset{Def.}{=} \beta'(F)$$

- Sei F ein nullstelliger Operator, also $F = \perp$. Dann gilt:

$$\beta(F) = 0 = \beta'(F) \text{ (nach der Definition der Bewertungen)}$$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Seien G und H Formeln, für die die Behauptung gilt. (Im Basisschritt haben wir gezeigt, dass solche Formeln existieren.)

<u>Induktionsschritt:</u> Um daraus weitere Formeln zu erzeugen gibt es nur folgende Möglichkeiten: $F = \neg G$, $F = G \wedge H$ und $F = G \vee H$ (oder G und H vertauscht). Für diese neuen Formeln muss nun die Behauptung gezeigt werden:

- Ist $F = \neg G$, so gilt:

$$\beta(F) = \beta(\neg G) \stackrel{Def}{=} 1 - \beta(G) \stackrel{IV}{=} 1 - \beta'(G) \stackrel{Def}{=} \beta'(\neg G) = \beta'(F)$$

- Ist $F = G \wedge H$, so gilt:

$$\begin{aligned} \beta(F) &= \beta(G \wedge H) \stackrel{Def}{=} \min(\beta(G), \beta(H)) \\ &\stackrel{IV}{=} \min(\beta'(G), \beta'(H)) \stackrel{Def}{=} \beta'(G \wedge H) = \beta'(F) \end{aligned}$$

- Ist $F = G \vee H$, so gilt:

$$\begin{aligned} \beta(F) &= \beta(G \vee H) \stackrel{Def}{=} \max(\beta(G), \beta(H)) \\ &\stackrel{IV}{=} \max(\beta'(G), \beta'(H)) \stackrel{Def}{=} \beta'(G \vee H) = \beta'(F) \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Die strukturelle Induktion ist nicht nur auf Mengen von Formeln anwendbar, sondern generell auf Mengen, die induktiv definiert sind. Das bedeutet, dass sie gewisse Grund-/ Basiselemente enthalten und für die restlichen Elemente beschrieben wird, wie sie aus schon definierten Elementen erzeugt werden können.

Beispiel: $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen (mit 0):

- $0 \in \mathbb{N}_0$ (Basiselement)
- Ist $n \in \mathbb{N}_0$, so auch $n + 1$.

Somit wird deutlich, dass die vollständige Induktion ein Spezialfall der strukturellen Induktion ist.