Automatisches Beweisen *12.05.03*

1 Aussagenlogik

1.1 Syntax

Definition 1.1 (aussagenlogische Formel) *Sei $\Phi_0 = \{x, y, z, \dots\}$ eine Menge von Prädikatvariablen. Die Menge Φ der* aussagenlogischen Formeln über Φ_0 *ist definiert als die kleinste Menge, für die gilt:*

1. $\Phi_0 \subseteq \Phi$, $\bot \in \Phi$.
2. *Falls $F, G \in \Phi$, so auch $(F \vee G) \in \Phi$, $(F \wedge G) \in \Phi$ und $\neg F \in \Phi$.*

1.2 Semantik

Definition 1.2 (Variablenbelegung) *Eine* (Variablen-)Belegung *oder* Interpretation β_0 *ist eine Abbildung $\beta_0 : \Phi_0 \to \{0, 1\}$, die den Prädikatvariablen Wahrheitswerte zuweist (0: falsch, 1: wahr).*

Definition 1.3 (Bewertung einer Formel) *Sei β_0 eine Variablenbelegung. Wir erweitern β_0 zur* Bewertung β*, die auf der Menge Φ der Formeln definiert ist durch*

$$
\begin{aligned}
\beta(x) &= \beta_0(x) \quad \text{für } x \in \Phi_0 & \beta(F \vee G) &= \max(\beta(F), \beta(G)) \\
\beta(\neg F) &= 1 - \beta(F) & \beta(F \wedge G) &= \min(\beta(F), \beta(G)) \\
\beta(\bot) &= 0
\end{aligned}
$$

Definition 1.4 (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit) *Eine Formel $F \in \Phi$ heißt* erfüllbar*, wenn es eine Variablenbelegung β_0 gibt mit $\beta(F) = 1$. Ansonsten heißt F unerfüllbar. Gilt für alle Variablenbelegungen β_0, dass $\beta(F) = 1$, so heißt F* (allgemein-)gültig. *F wird dann auch eine* Tautologie *genannt.*

Definition 1.5 ((semantischer) Folgerungsbegriff) *Sei $M \subseteq \Phi$ eine Formelmenge und $F \in \Phi$. Dann folgt F (semantisch) aus M, falls für jede Belegung β_0 mit $\beta(G) = 1$ für alle $G \in M$ auch $\beta(F) = 1$ gilt. Wir schreiben dafür auch $M \models F$. Für $\{G\} \models F$ schreiben wir auch $G \models F$, für $\emptyset \models F$ auch einfach $\models F$.*

Satz 1.6 (Deduktionstheorem) *Sei $M \subseteq \Phi$ und $F, G \in \Phi$. Dann gilt:*

$$M \cup \{F\} \models G \quad \text{impliziert} \quad M \models F \Rightarrow G.$$

Definition 1.7 (Dualität) *F heißt dual zu G, falls F aus G durch Vertauschen der Junktoren $\vee$ und $\wedge$ und der Symbole $\top$ und $\bot$ entsteht. Wir schreiben auch F^δ für die zu F duale Formel.*

Definition 1.8 (vereinfachte Formel) *Eine Formel $F \in \Phi$ heißt* vereinfacht*, falls entweder $F = \neg\bot (= \top)$ oder $F = \bot$ oder $\bot$ kommt nicht in F vor.*

Definition 1.9 (Negationsnormalform) *Eine Formel $F \in \Phi$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls Negationen nur direkt vor Prädikatvariablen auftreten. ($\perp$ wird dabei wie eine Prädikatvariable behandelt.)*

Definition 1.10 (Klausel) *Eine Disjunktion $F = (l_1 \vee \cdots \vee l_n)$ von Literalen l_i ($1 \leq i \leq n$) heißt Klausel. Sind alle Literale positiv (negativ) so heißt F positive (negative) Klausel. Ist höchstens ein Literal in F positiv, so heißt F Horn-Klausel. Eine Klausel mit k Literalen heißt k-Klausel. Eine 1-Klausel wird auch Unit-Klausel genannt. Die leere Klausel (i.Z.: $\Box$) entspricht der leeren Disjunktion, die als $\perp$ interpretiert wird.*

Definition 1.11 (konjunktive Normalform) *Eine Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), falls F eine Konjunktion von Klauseln ist, also $F = F_0 \wedge \cdots \wedge F_n$ für Klauseln F_i.*