4 Modallogik

4.2 Dynamische Aussagenlogik (PDL)

Definition 4.5 (PDL-Semantik) *Sei $\mathcal{K} = (W, \tau_0, \sigma_0)$ eine Kripke-Struktur mit gegebener Zustandsübergangsfunktion $\tau_0 : \Pi_0 \to \mathbb{P}(W \times W)$ für atomare Programme und gegebener Bewertungsfunktion $\sigma_0 : \Phi_0 \to \mathbb{P}(W)$ für atomare Formeln. Die Funktionen τ_0 und σ_0 werden auf die gesamten Mengen Π bzw. Φ erweitert (zu τ bzw. σ) durch:*

$$\begin{aligned}
\tau(\beta\,;\gamma) &= \tau(\beta) \circ \tau(\gamma) = \{(s,t) \mid (\exists u)((s,u) \in \tau(\beta) \wedge (u,t) \in \tau(\gamma))\} \\
\tau(\beta \cup \gamma) &= \tau(\beta) \cup \tau(\gamma) \\
\tau(\beta^*) &= \{(s,t) \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\exists s_0 \ldots s_k) \\
&\qquad\qquad (s_0 = s \wedge s_k = t \wedge (s_i, s_{i+1}) \in \tau(\beta) \text{ für } 0 \leq i < k)\} \\
\tau(F?) &= \{(s,s) \mid s \in \sigma(F)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\bot) &= \emptyset \\
\sigma(G \Rightarrow H) &= (W \setminus \sigma(G)) \cup \sigma(H) \\
\sigma([\alpha]G) &= \{s \in W \mid (\forall t)((s,t) \in \tau(\alpha) \Rightarrow t \in \sigma(G))\}
\end{aligned}$$

Eine PDL-Formel $F \in \Phi$ ist wahr bezüglich einer Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (W, \tau_0, \sigma_0)$ und eines Zustands $s \in W$, wenn $s \in \sigma(F)$. Man sagt dann auch "s erfüllt F in $\mathcal{K}$" und schreibt $(\mathcal{K}, s) \models F$. F gilt in $\mathcal{K}$, in Zeichen $\mathcal{K} \models F$, falls $(\mathcal{K}, s) \models F$ für alle $s \in W$. F heißt gültig, *geschrieben als $\models F$, falls F in jeder Kripke-Struktur gültig ist, d.h. falls $\mathcal{K} \models F$ für alle $\mathcal{K}$. F heißt* erfüllbar, *wenn es eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}$ und einen Zustand $s \in W$ gibt, so dass $(\mathcal{K}, s) \models F$.*