3 Prädikatenlogik

3.1 Syntax

Definition 3.1 (PL1-Term) *Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von (Element-)Variablen, $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionssymbolen. Die Menge $T(\mathcal{V},\mathcal{F})$ (oder einfach auch T) der* Terme (über $\mathcal{V}$ und $\mathcal{F}$) *ist definiert als die kleinste Menge mit*

1. $\mathcal{V} \subseteq T$.
2. *Falls $f \in \mathcal{F}$ (mit Stelligkeit n), und $t_1,\ldots,t_n \in T$, so auch $ft_1\ldots t_n \in T$.*

Definition 3.2 (PL1-Formel) *Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von Variablen, $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionssymbolen und $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationssymbolen. Die Menge $\Phi(\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{R})$ (oder einfach Φ) der* PL1-Formeln (über $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$) *ist dann definiert als die kleinste Menge mit*

1. $\perp \in \Phi$.
2. *Falls $R \in \mathcal{R}$ (mit Stelligkeit n) und $t_1,\ldots,t_n$ in $T(\mathcal{V},\mathcal{F})$, so ist $Rt_1\ldots t_n \in \Phi$.*
3. *Falls $F, G \in \Phi$, so auch $(F \vee G) \in \Phi$, $(F \wedge G) \in \Phi$ und $\neg F \in \Phi$.*
4. *Falls $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \Phi$, so auch $\exists x F \in \Phi$ und $\forall x F \in \Phi$.*

3.2 Semantik

Definition 3.3 (($\mathcal{F},\mathcal{R}$)-Struktur) *Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionssymbolen und $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationssymbolen. Eine $(\mathcal{F},\mathcal{R})$-Struktur ist ein Tupel $\mathcal{A} = (A, a)$, wobei $A \neq \emptyset$ eine Menge, das* Universum *von $\mathcal{A}$, ist und a eine Funktion, die jedem $f \in \mathcal{F}$ (der Stelligkeit n) eine n-stellige Funktion $a(f) : A^n \to A$ und jedem $R \in \mathcal{R}$ (der Stelligkeit n) eine n-stellige Relation $a(R) \subseteq A^n$ zuordnet.*

Definition 3.4 (Variablenbelegung (in einer Struktur)) *Sei $\mathcal{V}$ eine Variablenmenge und $\mathcal{A} = (A, a)$ eine $(\mathcal{F},\mathcal{R})$-Struktur. Eine* Variablenbelegung (für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{A}$) *ist eine Abbildung $\beta : \mathcal{V} \to A$. Für eine Belegung β, $a \in A$ und $x \in \mathcal{V}$ schreiben wir $\beta[x/a]$ für die an der Stelle x auf a abgeänderte Funktion β, also*

$$\beta[x/a](y) = \begin{cases} a & \text{falls } y = x, \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.5 (Interpretation) *Eine* Interpretation $\mathcal{I}$ (zu gegebenen $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$) *ist ein Tupel $(\mathcal{A}, \beta)$ bestehend aus einer $(\mathcal{F},\mathcal{R})$-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Variablenbelegung β für $\mathcal{V}$ in $\mathcal{A}$.*

Definition 3.6 (Interpretation eines Terms) *Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation. Für einen Term t definieren wir dessen Interpretation $\mathcal{I}(t)$ (in $\mathcal{A}$) rekursiv durch:*

- $\mathcal{I}(t) = \beta(t)$ *falls* $t \in \mathcal{V}$.
- $\mathcal{I}(ft_1 \dots t_n) = a(f)(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n))$.

Definition 3.7 (Erfüllbarkeitsrelation) *Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation. Wir definieren die* Erfüllbarkeitsrelation $\mathcal{I} \models F$ *für Formeln F durch:*

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{I} \not\models \bot & & \\
\mathcal{I} \models Rt_1 \dots t_n & \textit{gdw.} & a(R)(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n)) \\
\mathcal{I} \models F \vee G & \textit{gdw.} & \mathcal{I} \models F \textit{ oder } \mathcal{I} \models G \\
\mathcal{I} \models F \wedge G & \textit{gdw.} & \mathcal{I} \models F \textit{ und } \mathcal{I} \models G \\
\mathcal{I} \models \neg F & \textit{gdw.} & \mathcal{I} \not\models F \\
\mathcal{I} \models \forall x F & \textit{gdw.} & \mathcal{I}[x/a] \models F \textit{ für alle } a \in A \\
\mathcal{I} \models \exists x F & \textit{gdw.} & \textit{es gibt ein } a \in A \textit{ mit } \mathcal{I}[x/a] \models F
\end{array}
$$

Wir sagen '$\mathcal{I}$ erfüllt F' oder 'F gilt in $\mathcal{I}$' oder '$\mathcal{I}$ ist ein Modell von F', falls $\mathcal{I} \models F$. Falls es eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models F$ gibt, so heißt F erfüllbar. Falls $\mathcal{I} \models F$ für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ (mit passendem $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$), so heißt F allgemeingültig (in Zeichen: $\models F$).