3 Prädikatenlogik

3.3 Substitutionen

Definition 3.8 (freie/gebundene Variablen) *Die Menge der freien Variablen* $\mathrm{Fr}(F)$ *und der gebundenen Variablen* $\mathrm{Bd}(F)$ *einer Formel* $F \in \Phi$ *ist rekursiv definiert wie folgt:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(\bot) &= \emptyset & \mathrm{Bd}(\bot) &= \emptyset \\
\mathrm{Fr}(Rt_1 \dots t_n) &= \mathrm{Var}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{Var}(t_n) & \mathrm{Bd}(Rt_1 \dots t_n) &= \emptyset \\
\mathrm{Fr}(F \vee G) &= \mathrm{Fr}(F) \cup \mathrm{Fr}(G) & \mathrm{Bd}(F \vee G) &= \mathrm{Bd}(F) \cup \mathrm{Bd}(G) \\
\mathrm{Fr}(F \wedge G) &= \mathrm{Fr}(F) \cup \mathrm{Fr}(G) & \mathrm{Bd}(F \wedge G) &= \mathrm{Bd}(F) \cup \mathrm{Bd}(G) \\
\mathrm{Fr}(\neg F) &= \mathrm{Fr}(F) & \mathrm{Bd}(\neg F) &= \mathrm{Bd}(F) \\
\mathrm{Fr}(\exists x F) &= \mathrm{Fr}(F) \setminus \{x\} & \mathrm{Bd}(\exists x F) &= \mathrm{Bd}(F) \cup \{x\} \\
\mathrm{Fr}(\forall x F) &= \mathrm{Fr}(F) \setminus \{x\} & \mathrm{Bd}(\forall x F) &= \mathrm{Bd}(F) \cup \{x\}
\end{aligned}$$

Definition 3.9 (Substitutionen) *Die (simultane) Substitution* $t[x_1, \dots, x_r/t_1, \dots, t_r]$ *bzw.* $F[x_1, \dots, x_r/t_1, \dots, t_r]$ *ist für Terme* $t, t_1, \dots, t_r$*, paarweise verschiedene Variablen* $x_1, \dots, x_r$ *und Formeln* F *definiert durch (wir schreiben* $\vec{x}$ *für* $x_1, \dots, x_r$ *und* $\vec{t}$ *für* $t_1, \dots, t_r$*):*

$$\begin{aligned}
x[\vec{x}/\vec{t}] &= \begin{cases} x & \text{falls } x \notin \{x_1, \dots, x_r\} \\ t_i & \text{falls } x = x_i \end{cases} \\
(fs_1 \dots s_n)[\vec{x}/\vec{t}] &= fs_1[\vec{x}/\vec{t}] \dots s_n[\vec{x}/\vec{t}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bot[\vec{x}/\vec{t}] &= \bot \\
(Rs_1 \dots s_n)[\vec{x}/\vec{t}] &= Rs_1[\vec{x}/\vec{t}] \dots s_n[\vec{x}/\vec{t}] \\
(F \otimes G)[\vec{x}/\vec{t}] &= F[\vec{x}/\vec{t}] \otimes G[\vec{x}/\vec{t}] \quad \text{für } \otimes \in \{\vee, \wedge\} \\
(\neg F)[\vec{x}/\vec{t}] &= \neg(F[\vec{x}/\vec{t}]) \\
(QxF)[\vec{x}/\vec{t}] &= Qu(F[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, x/t_{i_1}, \dots, t_{i_s}, u]) \quad \text{mit } Q \in \{\exists, \forall\},
\end{aligned}$$

wobei in der letzen Zeile $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ *genau die Variablen* x_i *aus* $\vec{x}$ *sind, für die* $x_i \in \mathrm{Fr}(QxF)$ *und* $x_i \neq t_i$ *gilt, und* u *eine neue Variable mit* $u \notin \mathrm{Fr}(F) \cup \mathrm{Var}(t_{i_1}) \cup \dots \cup \mathrm{Var}(t_{i_s})$ *ist. Falls* $x \notin \mathrm{Var}(t_{i_1}) \cup \dots \cup \mathrm{Var}(t_{i_s})$*, kann auch* $u = x$ *gewählt werden.*

3.4 Normalformen

Definition 3.10 (Pränexe Normalform) *Eine Formel* $F \in \Phi$ *ist in* pränexer Normalform (PNF)*, falls sie die Form*

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F_0$$

besitzt, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ *für* $1 \leq i \leq n$ *und* F_0 *quantorenfrei ist.* $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ *heißt* Präfix *und* F_0 Matrix *von* F.

Definition 3.11 (Skolem-Normalform) *Eine Formel ist in* Skolem-Normalform (SNF), *wenn sie in pränexer Normalform ist und ihr Präfix nur universelle Quantoren (*$\forall$*) enthält.*