4 Modallogik

4.1 Modale Aussagenlogik

Definition 4.2 (Kripke-Semantik) *Eine* Kripke-Struktur $\mathcal{K}$ *ist ein Tripel* $\mathcal{K} = (W, \tau, \sigma_0)$. W *ist dabei eine nicht näher spezifizierte Menge von Welten (Zuständen, Sichten),* $\tau \subseteq W \times W$ *die Sichtbarkeits- oder Transitionsrelation und* $\sigma_0 : \Phi_0 \to \mathbb{P}(W)$ *die Bewertungsfunktion (für atomare Aussagen). Die* Bewertung σ *einer modallogischen Formel ist dann rekursiv definiert als Erweiterung von* σ_0 *durch*

$$\begin{aligned}
\sigma(\bot) &= \emptyset \\
\sigma(\neg F) &= W \setminus \sigma(F) \\
\sigma(F \vee G) &= \sigma(F) \cup \sigma(G) \\
\sigma(F \wedge G) &= \sigma(F) \cap \sigma(G) \\
\sigma(\Box F) &= \{s \in W \mid \forall t((s,t) \in \tau \Rightarrow t \in \sigma(F))\}
\end{aligned}$$

Eine Formel $F \in \Phi_M$ gilt *in einem Zustand* $s \in W$ *einer Kripke-Struktur* $\mathcal{K} = (W, \tau, \sigma_0)$*, falls* $s \in \sigma(F)$*. Man sagt dann auch "*s *erfüllt* F *in* $\mathcal{K}$*" und schreibt* $(\mathcal{K}, s) \models F$*.*

Definition 4.3 (ML-Erfüllbarkeit/Gültigkeit) *Eine Formel* $F \in \Phi_M$ *heißt erfüllbar, wenn es eine Kripke-Struktur* $\mathcal{K} = (W, \tau, \sigma_0)$ *und einen Zustand* $s \in W$ *gibt, so dass* $(\mathcal{K}, s) \models F$*. Für ein gegebenes* $\mathcal{K} = (W, \tau, \sigma_0)$ *und eine Formel* $F \in \Phi_M$ *heißt* F gültig in $\mathcal{K}$ (i.Z.: $\mathcal{K} \models F$)*, falls für alle* $s \in W$ *gilt:* $(\mathcal{K}, s) \models F$*. Falls für beliebige Kripke-Strukturen* $\mathcal{K}$ *gilt, dass* $\mathcal{K} \models F$*, so heißt* F *allgemeingültig (i.Z.:* $\models F$*).*

4.2 Dynamische Aussagenlogik (PDL)

Definition 4.4 (PDL-Formeln) *Sei* Π_0 *die Menge der atomaren Programme und* Φ_0 *die Menge der atomaren Aussagen. Dann sind die Menge der Programme* Π *und die Menge der PDL-Formeln* Φ_D *definiert als die kleinsten Mengen, für die gilt:*

1. $\Pi_0 \subseteq \Pi$
2. $\Phi_0 \subseteq \Phi_D, \bot \in \Phi_D$
3. *Wenn* $\alpha, \beta \in \Pi$*, dann auch* $(\alpha\,;\beta) \in \Pi$*,* $(\alpha \cup \beta) \in \Pi$ *und* $\alpha^* \in \Pi$*.*
4. *Wenn* $F, G \in \Phi_D$*, dann auch* $\neg F \in \Phi_D$*,* $(F \vee G) \in \Phi_D$ *und* $(F \wedge G) \in \Phi_D$*.*
5. *Wenn* $\alpha \in \Pi$ *und* $F \in \Phi_D$*, dann ist* $[\alpha]F \in \Phi_D$ *und* $F? \in \Pi$*.*